Chapitre 3

Dénombrement

Liste des exercices à travailler : 52, 56, 57, 58, 59, 60, 61

I. Ensemble, cardinal

1. Ensemble, sous-ensemble

Définition 1

Un **ensemble** E est une collection d'éléments. On note $x \in E$ si x est un élément de E.

- Un **ensemble fini** est un ensemble qui contient n éléments où n est un entier naturel.
- Un **ensemble infini** est un ensemble qui n'est pas fini.
- On note $E = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$, où $e_1, e_2, ..., e_n$ sont les **éléments de E**.
  Le nombre d'éléments n de E s'appelle **cardinal de E**, noté $\text{card}(E)$

Exemple 1

- $A = \{1, 3, 6, 12\}$ est un ensemble fini de cardinal 4
- $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ et $[0, 1]$ sont des ensembles infinis.

Définition 2

A est un **sous-ensemble de E** (ou une **partie de E**) si tout élément de A est aussi un élément de E. On note alors $A \subset E$ (A inclus dans E).

Propriété 1

Soit E un ensemble fini et soit A une **partie** de E. Alors A est fini et $\text{card}(A) \leq \text{card}(E)$.

Remarque

On note $\overline{A}$ l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A.
Rappel : deux ensembles A et B sont dit **disjoints** si $A \cap B = \varnothing$.

2. Sous-ensemble, principe additif

Dans toute cette partie, E désigne un ensemble fini.

Propriété 2

Soient A et B deux parties disjointes de E. Alors $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$
Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont n parties disjointes de E deux à deux disjointes, alors $\text{card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) + \cdots + \text{card}(A_n)$
On note

$$\text{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \text{card}(A_k)$$

On en déduit la propriété suivante :

Propriété 3

Si $\text{card}(E) = n$, alors $\text{card}(\overline{A}) = n - \text{card}(A)$

Propriété 4

(principe additif) Soient A et B deux parties de E. Alors

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

Démonstration : En effet, $A \cup B$ est l'union disjointe de A et de $B \cap \overline{A}$.

Or, B est l'union disjointe de $B \cap A$ et de $B \cap \overline{A}$ donc $\text{card}(B) = \text{card}(B \cap \overline{A}) + \text{card}(B \cap A)$ *d'où* $\text{card}(B \cap \overline{A}) = \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.

Finalement :

$$\begin{aligned} \text{card}(A \cup B) &= \text{card}(A) + \text{card}(B \cap \overline{A}) \\ &= \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B) \end{aligned}$$

□

II. Produit cartésien et k-uplet

1. produit cartésien

Définition 3

Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E et F, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (e, f) où $e \in E$ et $f \in F$.

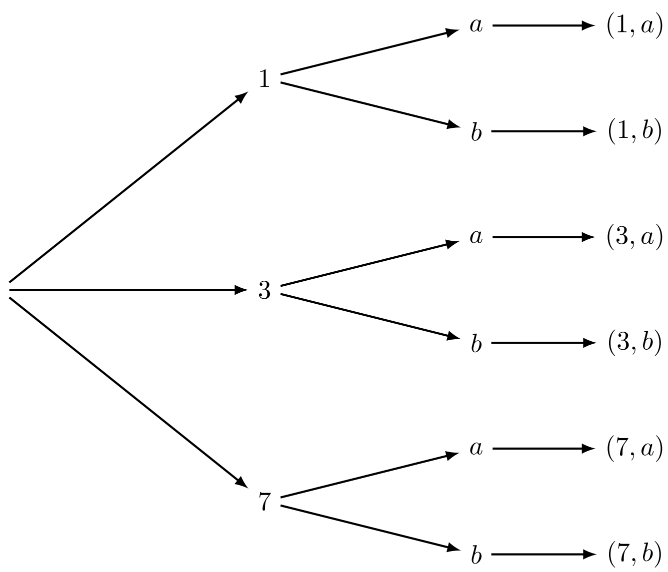
Un élément de $E \times F$ a donc une première composante dans E et une seconde composante dans F. On a donc $E \times F \neq F \times E$ en général, et $(e, f) \neq (f, e)$ pour $e \in E$ et $f \in F$.

Exemple 2

Si $E = \{1, 3, 7\}$ et $F = \{a, b\}$, alors les éléments de $E \times F$ sont $(1, a)$, $(1, b)$, $(3, a)$, $(3, b)$, $(7, a)$ et $(7, b)$
On peut représenter le produit cartésien par un tableau croisé

éléments de F / éléments de E	a	b
1	$(1, a)$	$(1, b)$
3	$(3, a)$	$(3, b)$
7	$(7, a)$	$(7, b)$

On peut aussi représenter cette situation par un arbre représentant le choix d'un élément de E puis d'un élément de F



Exemple 3

le choix d'une carte dans un jeu de 52 cartes est équivalent au choix d'une valeur parmi

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, V, D, R\}$$

et d'une couleur parmi

$$F = \{"coeur", "pique", "carreau", "trefle"\}$$

Le choix d'une carte est le choix d'un élément de $E \times F$.

Exemple 4

Le résultat d'un lancer de deux dés est le choix d'un élément de $E \times E$ avec $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Remarque

le produit cartésien $E \times E$ se note également E^2

Propriété 5

(principe multiplicatif)
Si E et F sont finis, alors $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$.

Exemple 5

Dans un jeu de cartes, il y a 13 valeurs et 4 couleurs et chaque carte a une unique combinaison d'une valeur et d'une couleur. Le nombre total de cartes est donc $4 \times 13 = 52$.

Exemple 6

Dans un lancer de deux dé à 6 faces, il y a $6 \times 6 = 36$ résultats possibles.

⚠ *a priori* les résultats $(1, 4)$ et $(4, 1)$ sont deux résultats **différents**.

2. k-uplet

Définition 4

Soit E un ensemble fini et $k \geq 1$ un entier.
Un **k-uplet** d'éléments de E est une liste ordonnée de k éléments de E.
Un k-uplet d'éléments de E est un élément de $\underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{k \text{ fois}} = E^k$

Vocabulaire :

- 2-uplet = doublet
- 3-uplet = triplet
- 4-uplet = quadruplet etc...

Exemple 7

Dans un plan muni d'un repère, un point peut être assimilé à un couple de réels (ses coordonnées), donc à un élément de $\mathbb{R}^2$.
De même, dans l'espace muni d'un repère, un point peut être assimilé à un triplet de réels donc à un élément de $\mathbb{R}^3$.

Remarque

⚠ Différence entre **ordonné** et **non ordonné**

- Un **ensemble** est non ordonné, ce qui signifie que les ensembles suivants sont égaux : $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$
- Un k-uplet est **ordonné**, ce qui signifie que les éléments suivants sont différents : $(1, 2, 3) \neq (3, 1, 2)$

Propriété 6

Le nombre de k-uplets se calcule à l'aide du principe multiplicatif :

$$\text{card}(E^k) = \underbrace{\text{card}(E) \times \cdots \times \text{card}(E)}_{k \text{ fois}} = \text{card}(E)^k$$

Exemple 8

Vaut-il mieux avoir un mot de passe de 12 caractères constitué uniquement de lettres en minuscule ou un mot de passe de 8 caractères constitué de lettres majuscules et minuscules et de chiffres ? **Solution :**

Il y a $26^{12} \simeq 9 \times 10^{16}$ mots de passe possible de 12 caractères constitués de lettres minuscules et $62^8 \simeq 2 \times 10^{14}$ mots de passe possibles de 8 caractères constitués de lettres majuscules, minuscules et chiffres. La première option est donc meilleure pour se protéger d'une attaque informatique.

3. Nombre de parties d'un ensemble

On considère un ensemble fini E de cardinal n.
On s'intéresse au nombre de parties de E, c'est à dire au nombre d'ensembles A tels que $A \subset E$.

Remarque

L'ensemble E est toujours une partie de lui même et l'ensemble vide $\varnothing$ est toujours une partie de E.
$E \subset E$
$\varnothing \subset E$

Propriété 7

Le nombre de parties de E est égal à 2^n

Exemple 9

Compter "à la main" le nombre de parties de $E = \{1, 2, 3\}$.

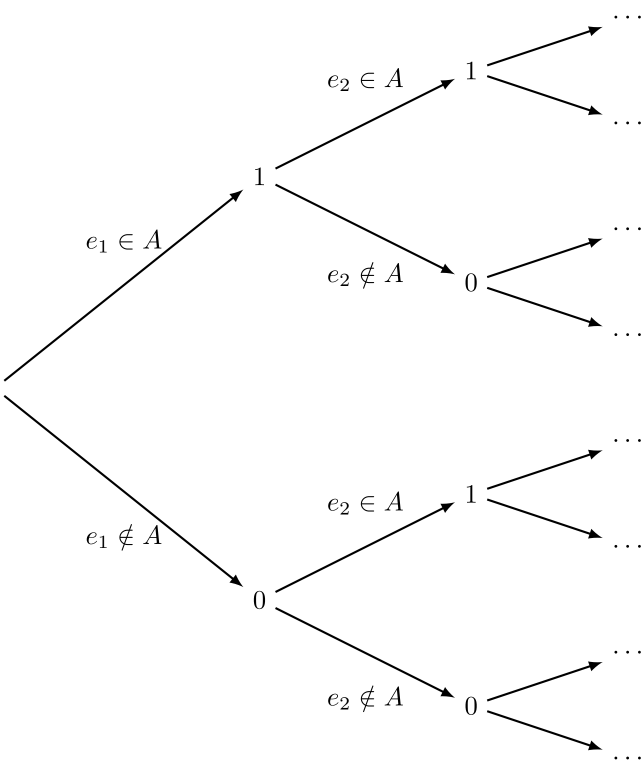
Solution :

D'après la propriété il devrait y avoir $2^3 = 8$ *parties de* E.
On peut déjà compter l'ensemble vide $\varnothing$ *et l'ensemble* E. *Ensuite il y a :*

- $\{1\}$
- $\{2\}$
- $\{3\}$
- $\{1, 2\}$
- $\{1, 3\}$
- $\{2, 3\}$

soit 8 *parties en tout.*

Démonstration : Posons $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$.
Choisir une partie A *de* E, *c'est dire pour chaque élément* e_i *s'il appartient à* A *ou non.*
On peut représenter ce choix par un arbre, en notant 1 *si l'élément appartient à* A *et* 0 *sinon.*



Le choix d'une partie A *de* E *est donc équivalente au choix d'un n-uplet de* $\{0, 1\}$ *(c'est à dire une liste de* 1 *et de* 0 *de taille* n*).*
Exemples :

- *l'ensemble* $A = \{e_1, e_3\}$ *correspond au n-uplet* $(1, 0, 1, 0, 0, \dots, 0)$
- *L'ensemble vide* $\varnothing$ *correspond au n-uplet* $(0, 0, 0, \dots 0)$
- *L'ensemble* E *correspond au n-uplet* $(1, 1, \dots 1)$

Il y a donc autant de parties de E *que de n-uplets de* $\{0, 1\}$, *c'est à dire d'éléments de* $\{0, 1\}^n$
D'après la partie précédente $\text{card}(\{0, 1\}^n) = 2^n$*)*

□

III. Arrangements, permutations

Dans toute cette partie, E est un ensemble fini à n éléments.

Si k est un entier, on note $k!$ (prononcé "factorielle k"), le nombre $k! = k \times (k-1) \times (k-2) \times \cdots \times 2 \times 1$

Exemple 10

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

1. Arrangements

Définition 5

Un **arrangement** de k éléments d'un ensemble E est un k-uplet d'éléments **distincts** de E, autrement dit une **liste ordonnée sans répétition** de k éléments de E.

Exemple 11

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, alors $(3, 1, 6)$ est un **arrangement à** 3 **éléments de** E et $(6, 1, 3)$ en est un autre, mais $(3, 3, 6)$ n'en est pas un.

Propriété 8

Le nombre d'arrangements à k éléments d'un ensemble E à n éléments, noté A_n^k, est égal à $n \times (n-1) \times ... \times (n-k+1)$

Remarque

$$A_n^k = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Remarque

Il y a k termes dans le produit $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$. En effet, il commence à $(n-0)$ et se termine à $(n-(k-1))$. De 0 à $k-1$ il y a bien k entiers.

Exemple 12

on considère une course à pied entre 10 concurrents numérotés de 1 à 10.
Le nombre de résultats au podium est le nombre de façon d'ordonner 3 concurrents distincts parmi les 10. Le nombre de podiums possibles est donc $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$

Démonstration : Démontrons la formule. Pour choisir k éléments distincts parmi n, il faut d'abord choisir un élément quelconque parmi les n éléments de E.
Pour chacun de ces choix, il y a ensuite $n-1$ choix pour choisir un élément distinct du premier.
Pour chacun de ces deux choix, il y a ensuite $n-2$ choix pour choisir un élément distinct des deux premiers...
...et ainsi de suite jusqu'à avoir choisi k éléments. Il y a donc $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$ choix possibles en tout.

□

2. Permutations

Définition 6

Une permutation de E est un arrangement à n éléments de E.

Remarque

Une permutation de E est une liste ordonnée de tous les éléments de E.

Écrire toutes les permutations de E, c'est écrire toutes les façons possibles de faire une liste ordonnées de tous les éléments de E.

Exemple 13

Écrire toutes les permutations de $E = \{1, 2, 3\}$

Solution :

Les permutations de E sont : $\{(1,2,3);(1,3,2);(2,1,3);(2,3,1);(3,1,2);(3,2,1)\}$

Propriété 9

Le nombre de permutation de E est $n!$

Démonstration : Découle immédiatement de la formule pour les arrangements

□

IV. Combinaisons

1. Définition

Définition 7

On appelle combinaison de k éléments de E (ou k-combinaison) une partie de E à k éléments.

Exemple 14

$E = \{a; b; c; d; e; f; \}$
La partie $\{a; e; f\}$ est une combinaison de 3 éléments de E.

Remarque

$\{e; f; a\}$ désigne la même partie de E : $\{e; f; a\} = \{a; e; f\}$.
En revanche, les 3-uplets $(a; e; f)$ et $(e; f; a)$ sont différents : $(a; e; f) \neq (e; f; a)$
Une combinaison k-combinaison de E est donc une **liste non ordonnée de k éléments de E.**

2. Dénombrement

Exemple 15

Combien y a-t-il de partie à deux éléments dans l'ensemble $E = \{a; b; c; d\}$?
Réponse : Il y a $\{a; b\}$, $\{a; c\}$, $\{a; d\}$, $\{b; c\}$,$\{b; d\}$ et $\{c; d\}$ donc il y a 6 combinaison à 2 éléments de E.

Définition 8

Soit n un entier et E un ensemble tel que $\text{card}(E) = n$.
Le nombre de combinaison de k éléments de E est noté C_n^k ou $\binom{n}{k}$ et se lit "k parmi n".
Le nombre $\binom{n}{k}$ est appelé **coefficient binomial**.

Propriété 10

Soit $n \geq 1$ un entier et k un entier tel que $0 \leq k \leq n$. Alors

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Démonstration : Pour chaque partie A de E contenant k éléments, on peut définir $k!$ arrangements de ces k éléments de A. Réciproquement, chaque arrangement est une liste ordonnée de k éléments de E, donc une partie A de E sur laquelle on a défini un ordre.

Ainsi, il y a autant de k-arrangements de E que de façon de choisir une partie à k éléments de E puis de choisir une façon d'ordonnée ces k éléments, on en déduit :

$$A_n^k = C_n^k \times k!$$

d'où $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{(n-k)! \times k!}$

□

Exemple 16

Calculer $\binom{10}{3}$, $\binom{7}{3}$ et $\binom{20}{4}$

Solution :

$$\begin{aligned}\binom{10}{3} &= \frac{10!}{7! \times 3!} \\ &= \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} \\ &= 120\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\binom{7}{3} &= \frac{7!}{4! \times 3!} \\ &= \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} \\ &= 35\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\binom{20}{4} &= \frac{20!}{16! \times 4!} \\ &= \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= 4845\end{aligned}$$

Exemple 17

Au poker, une main est un ensemble de 5 cartes parmi un paquet de 52 cartes.
Combien y a-t-il de mains possibles ?

Solution :

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{47! \times 5!} = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 2\ 598\ 960$$

Il y a 2 598 960 *mains possibles.*

Exemple 18

Calculer $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{n}$, $\binom{n}{1}$ et $\binom{n}{n-1}$ pour différentes valeurs de n. Que peut-on constater ? **Solution :**

On a toujours $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. *En effet, puisque* $0! = 1$ *on a* $\dfrac{n!}{(n-0)!0!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$

De même, on a toujours $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$. *En effet,* $\dfrac{n!}{(n-1)!1!} = \dfrac{n!}{(n-1)!} = n$.

Propriété 11

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

Démonstration : En effet, quel que soit l'ensemble E *tel que* $\text{card}(E) = n$, *il y a un seul sous-ensemble de* E *à* 0 *éléments : l'ensemble vide.*
Il y a un seul sous-ensemble de E *à* n *éléments : l'ensemble* E *lui-même.*
Il y a n *sous-ensemble de* E *à* 1 *élément : les ensemble de la forme* $\{e\}$ *où* $e \in E$.

□

V. Propriétés des coefficients binomiaux

1. Somme des coefficients binomiaux

Propriété 12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Exemple 19

$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$

Démonstration : Soit E *un ensemble à* n *éléments. Le nombre de parties de* E *est* 2^n *(voir Chapitre 2)*
On peut diviser les parties de E *en* $n+1$ *catégories distinctes :*

- *celle qui contient* 0 *éléments :* $\varnothing$
- *celles qui contiennent* 1 *éléments*
- *celles qui contiennent* 2 *éléments*
- $\vdots$
- *celles qui contient* n *éléments :* E

Le cardinal de chacune de ces catégories est respectivement $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$,....,$\binom{n}{n}$. *Si on fait la somme, on obtient donc le nombre total de parties de* E, *soit* 2^n.

□

2. Symétrie

Propriété 13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et k un entier avec $0 \leq k \leq n$. Alors

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Démonstration : Par le calcul, on applique la formule :

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Par le dénombrement : choisir une partie de E à k éléments revient à choisir les $n-k$ éléments qui ne sont pas dans cette partie. Il y a donc autant de parties à k éléments que de parties à $n-k$ éléments.

□

3. Triangle de Pascal

Théorème 1

(Formule de Pascal)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit k un entier tel que $1 \leq k \leq n-1$. Alors :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Démonstration : Soit E un ensemble tel que $\text{card}(E) = n$ et soit k tel que $1 \leq k \leq n-1$.

Considérons un élément quelconque $a \in E$. On peut diviser les parties à k éléments de E en deux catégories distinctes :

- *celles qui contiennent a.*
- *celles qui ne contiennent pas a.*

Choisir une partie de E à k éléments contenant a revient à choisir les $k-1$ éléments restants parmi les $n-1$ éléments distincts de a. Il y en a donc $\binom{n-1}{k-1}$.

Choisir une partie de E à k éléments ne contenant pas a revient à choisir k éléments parmi les $n-1$ éléments de E distincts de a. Il y en a donc $\binom{n-1}{k}$.

Le nombre de partie à k éléments de E est donc $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. On a donc

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

□

Propriété 14

Le triangle de Pascal permet de retrouver les valeurs des coefficients binomiaux à l'aide de simples additions.
On inscrit les coefficients binomiaux en fonction de n et de k dans un tableau à double entrée en commençant par les 1 pour $\binom{n}{0}$ et $\binom{n}{n}$, puis on applique la formule du binôme : la somme de deux coefficients consécutifs sur la même ligne donne le coefficient immédiatement sous le 2ème (par exemple $4+6=10$ à la 5ème ligne.)

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1